Sistemas de Tableau com Unificação para Lógicas Modais†

Marcos Mota do Carmo Costa

Professor conveniado do DI-UFPE

Pesquisador da EMBRAPA

SHCE 711 E 302

70660 Brasilia DF Brasil

Sumário

O método dos tableaux tem se mostrado bastante intuitivo embora ineficiente, em virtude da dificuldade em se controlar as instanciações em lógicas de 1ª ordem. Estudos recentes comprovaram a eficiência de provadores automáticos de teoremas baseados em tableau com a incorporação do algoritmo de unificação para a lógica clássica de 1ª ordem.

Neste artigo propomos um sistema de tableau para as lógicas modais K, T, D, K4 e S4 com a fórmula de Barcan utilizando o algoritmo de unificação no controle das instanciações.

Palavras chaves: Provadores automáticos de teoremas, Sistema de tableau, Lógica modal e Algoritmo de unificação.

1 Introdução

Após [12] e até meados da década de 80, o sistema de tableau foi evitado como base para provadores automáticos de teoremas em virtude de sua ineficiência causada por inúmeras instanciações de variáveis dificilmente direcionáveis. Estas instanciações puderam ser evitadas—ou melhor, direcionadas—por Reeves [11], com a incorporação do algoritmo de unificação (*cf.* [12]) no sistema de tableau.

Estudos recentes vieram dar suporte a deduções mecanizadas para as lógicas modais. Ressaltamos [9], com o método de resolução, [14] com o método de matriz com conexão e [5, 2] com o método de tableau com unificação.

Neste artigo propomos um sistema de tableau para as lógicas modais K, T, D, K4 e S4 com a fórmula de Barcan utilizando o algoritmo de unificação no controle das instanciações.

Na seção 2 os sistemas de tableaux para as lógicas clássica e modal de 1ª ordem são apresentados sob forma resumida. Na seção 3 é apresentado o sistema de tableau com unificação para as lógicas modais consideradas. Conclusões são tecidas na seção 4.

É assumido que o leitor esteja familiarizado com as lógicas clássica e modal, com o método de resolução e tenha ao menos uma noção inicial a respeito do sistema de tableau.

†Pesquisa parcialmente financiada pelo CNPq e FACEPE.

2 Sistemas de Tableaux

O método dos Tableaux de prova refutacional para a lógica clássica de 1ª ordem é devido aos trabalhos de Hintikka [8] e Beth [1] e apresentado de forma elegante, sob uma notação uniforme por Smullyan em [13].

Nesta seção iremos apresentar o sistema de tableau inicialmente para a lógica clássica e, posteriormente, para os sistemas K, T, D, K4 e S4 da lógica modal de 1ª conforme descrito em [4].

2.1 Sistema de Tableau para a Lógica Clássica

Regras Tipo A:

$$\begin{array}{c} \alpha \wedge \beta \\ \hline \alpha \\ \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(\alpha \vee \beta) \\ \hline \neg\alpha \\ \neg\beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(\alpha \Rightarrow \beta) \\ \hline \neg\alpha \\ \neg\beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\neg\alpha \\ \hline \alpha \\ \end{array}$$

Regras Tipo B:

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\alpha \vee \beta} \\ \hline \alpha & \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\alpha \Rightarrow \beta} \\ \hline \neg\alpha & \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\neg(\alpha \wedge \beta)} \\ \hline \neg\alpha & \neg\beta \end{array}$$

Regras Tipo C:

$$\begin{array}{c} \forall x\alpha \\ \hline \forall x\alpha \\ \alpha(x/t) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\exists x\alpha \\ \hline \neg\exists x\alpha \\ \neg\alpha(x/t), \end{array} \quad \text{onde } t \text{ é um termo qualquer}$$

Regras Tipo D:

$$\begin{array}{c} \exists x\alpha \\ \hline \alpha(x/c) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\forall x\alpha \\ \hline \neg\alpha(x/c), \end{array} \quad \text{onde } c \text{ é uma constante nova para o tableau}$$

2.2 Sistema de Tableau para Lógica Modal com a Fórmula de Barcan

Uma refutação baseada em tableau para lógica modal requer o uso de diversos sub-tableaux. A criação e manipulação destes sub-tableaux vem, de uma certa forma, simular as mudanças de mundo em uma estruturade mundos possíveis de Kripke (*cf.* [10]). Se a fórmula de Barcan ($\forall x\Box\alpha \Rightarrow \Box\forall x\alpha$) é aceita como axioma, então as regras do sistema implicam na adição de fórmulas a (sub-)tableaux já existentes. Portanto, faz-se necessário definir um aparato para identificação dos tableaux e suas fórmulas, o que é feito a seguir.

Definição 2.1 *Um* prefixo *é qualquer expressão utilizada para dar nome a um tableau que pode aparecer na refutação por tableau de uma dada fórmula.*

A idéia é ter um nome diferente para cada tableau de uma refutação. Então, uma fórmula α em uma refutação por tableau é unicamente identificada pelo par $(\mathcal{T}, \alpha)$, onde $\mathcal{T}$ é o nome do tableau onde α ocorre.

Para administrar a criação de novos tableaux e adição de fórmulas a tableaux existentes, é criado o operador ρ que aplicado a um prefixo $\mathcal{T}$ e uma fórmula α produz um dos dois resultados abaixo:

- Cria um novo tableau, cujo nome é $\mathcal{T}$, começando com α em sua forma skolemizada e registrando os quantificadores do tableau original, se $\mathcal{T}$ não é um nome de algum tableau existente.
- Adiciona α ao tableau designado pelo prefixo $\mathcal{T}$, caso contrário.

Apresentamos a seguir, o sistema de tableau para a lógica modal de 1ª ordem, que é formado pelas regras do sistema de tableau para a lógica clássica proposicional acrescido das regras específicas para cada sistema da lógica modal (onde α e β são fórmulas):

Sistema K: Formado pelas regras da lógica clássica mais as seguintes regras:

Regras Tipo E:

$$\frac{\Box\alpha}{\rho(\mathcal{T}',\alpha)} \qquad \frac{\neg\Diamond\alpha}{\rho(\mathcal{T}',\neg\alpha)},$$

Onde $\mathcal{T}'$ é um tableau previamente gerado por aplicação da regra F a uma fórmula do ramo.

Regras Tipo F:

$$\frac{\Diamond\alpha}{\rho(\mathcal{T}',\alpha)} \qquad \frac{\neg\Box\alpha}{\rho(\mathcal{T}',\neg\alpha)},$$

onde $\mathcal{T}'$ é um novo tableau.

Sistema T: Formado pelas regras do sistema K mais a seguinte regra:

Regras Tipo E-R[1]**:**

$$\frac{\Box\alpha}{\alpha} \qquad \frac{\neg\Diamond\alpha}{\neg\alpha}$$

Sistema D: Formado pelas regras do sistema K, sendo que a restrição aplicada à regra E é modificada para:

$\mathcal{T}'$ é um novo tableau ou um tableau previamente gerado por aplicação da regra E ou F a uma fórmula do ramo.

Sistema K4: Formado pelas regras do sistema K mais a seguinte regra:

[1] "R" de reflexiva.

Regras Tipo E-T[2]**:**

$$\frac{\Box\alpha}{\rho(\mathcal{T}', \Box\alpha)} \qquad \frac{\neg\Diamond\alpha}{\rho(\mathcal{T}', \neg\Diamond\alpha)},$$ Onde $\mathcal{T}'$ é um tableau previamente gerado por aplicação da regra F a uma fórmula do ramo.

Sistema S4: Formado pelas regras dos sitemas T e K4.

Observação: O leitor é convidado a verificar que a regra E pode ser eliminada do conjunto de regras de tableau para o sistema S4, por ser redundante.

[Fim_da_Obs]

3 Sistemas de Tableaux com Unificação

Nesta seção apresentamos os sistemas de tableaux com unificação para a lógica clássica e, posteriormente, para a lógicas modais sendo consideradas.

3.1 Tableau com Unificação para a Lógica Clássica

O sistema de tableau com unificação para fórmulas skolemizadas da lógica clássica de 1ª ordem pode ser definido através das regras A e B do sistema sem unificação mais a regra C abaixo e a incorporação do algoritmo de unificação na obtenção de pares de fórmulas atômicas complementares.

Regras Tipo C:

$$\frac{\forall x\alpha}{\begin{array}{c}\forall x\alpha\\ \alpha(x/y)\end{array}} \qquad \frac{\neg\exists x\alpha}{\begin{array}{c}\neg\exists x\alpha\\ \neg\alpha(x/y)\end{array}},$$ onde a variável y é nova para o tableau

3.2 Sistema de Tableau com Unificação para Lógica Modal

Iniciamos a apresentação do sistema com algumas definições necessárias para obtenção da forma normal de Skolem de uma fórmula dada.

As formas normais de Prenex e Skolem são obtidas como na lógica clássica, considerando somente os operadores externos aos operadores modais. Para exemplificar, consideremos a fórmula

$$\forall x\Box\exists yP(x,y) \Rightarrow \forall z\Box R(z)$$

que tem

$$\forall z(\Box\exists yP(f(z),y) \Rightarrow \Box R(z)$$

[2] "T" de transitiva.

como uma forma de suas formas normais de Skolem.

Definição 3.1 *A ocorrência de uma subfórmula φ tem uma polaridade positiva em uma fórmula se α está no escopo de um número par de "$\neg$", implícitos ou explícitos. Caso contrário, α é dita ter uma polaridade negativa.*

As regras do sistema de tableau com unificação são derivadas das regras do sistema sem unificação com as seguintes modificações:

- Em qualquer estado do tableau, qualquer fórmula está na forma normal de Skolem (conforme definido acima).
- O algoritmo de unificação é usado a fim de se obter pares complementares de fórmulas atômicas.
- Depois de cada aplicação das regras E ou F, precisamos skolemizar a fórmula resultante, tomando os seguintes cuidados:
  - Ao começarmos um novo tableau com a fórmula α, precisamos skolemizar α considerando os quantificadores do tableau original como se eles fossem os quantificadores mais externos de α;
  - Ao adicionarmos α a um tableau $\mathcal{T}$ existente, precisamos skolemizar α considerando as variáveis quantificadas da fórmula que originou $\mathcal{T}$ como se elas fossem os quantificadores mais externos de α.
- Por causa do comentário anterior, a regra C precisa ser modificada a fim de mantermos a informação dos quantificadores fora das modalidades. Assim, quando aplicamos a regra C, a variável quantificada é anotada no operador modal. Como um exemplo, vamos considerar a fórmula:

  $$\forall x \Box P(x).$$

  Após a aplicação da regra C, obtemos:

  $$\Box^x P(x).$$

  A formalização da regra tipo C é apresentada abaixo.
- O processo de renomeação de variáveis para unificação fica agora sujeito à seguinte restrição: Seja $\Diamond\gamma$ (ou $\neg\Box\gamma$) uma subfórmula de $\forall x\varphi$. Se aplicarmos a regra F a $\Diamond\gamma$ (ou $\neg\Box\gamma$), então não podemos renomear a variável x quando formos unificar a fórmula γ (ou alguma

de suas subfórmulas) no subtableau gerado. E, indicamos este procedimento colocando uma marca "$\bullet$" antes da variável x.

Esta restrição se deve ao fato de que podemos aplicar a regra E mais de uma vez para a mesma fórmula, criando mais de uma instância de uma variável quantificada fora do operador modal e cada vez que aplicamos a regra F, geramos um novo tableau e, portanto, não podemos mais gerar outras intâncias desta variável para este subtableau. O tratamento das variáveis com esta marca é dado a seguir.

- Sejam α uma fórmula e x uma variável ou uma *variável marcada* na forma $x = \bullet y$. Então, a fórmula α^x é obtida pelas regras:
  - $\alpha^x = \alpha$, se α é uma fórmula atômica;
  - $\alpha^x = \neg\beta^x$, se $\alpha = \neg\beta$;
  - $\alpha^x = \beta^x \vee \theta^x$, se $\alpha = \beta \vee \theta$;
  - $\alpha^x = \forall x \beta^x$, se $\alpha = \forall x \beta$;
  - $\alpha^x = \Box^x \beta^x$, se $\alpha = \Box\beta$ com polaridade positiva;
  - $\alpha^x = \Box^{\bullet x} \beta^{\bullet x}$, se $\alpha = \Box\beta$ com polaridade negativa.
- A regra tipo C é agora modificada para:

Regras Tipo C:

$$\frac{\forall x \alpha}{\begin{array}{c}\forall x\alpha \\ \alpha^y(x/y)\end{array}} \qquad \frac{\neg\exists x\alpha}{\begin{array}{c}\neg\exists x\alpha \\ \neg\alpha^y(x/y),\end{array}}$$

Onde a variável y é nova para o tableau e α^y é obtida conforme definido acima.

Teorema 3.1 *Seja α uma fórmula na forma normal de Skolem. Podemos obter um tableau atomicamente fechado para α usando o método dos tableaux sem unificação se e somente se pudermos obter um tableau atomicamente fechado para α usando o método dos tableaux com unificação.*

Prova Omitimos a prova por questão de espaço. Para tanto, o leitor poderá referir-se a [4].

[Fim_da_Prova]

Exemplo 3.1 Vamos provar a seguinte instância da fórmula de Barcan:[3]

$$\forall z \Box P(z) \Rightarrow \Box \forall x P(x).$$

[3] Note que utilizamos prefixos para nomear e distingüir os tableaux.

1.	$\mathcal{T}_1$	$\forall z \neg(\Box P(z) \Rightarrow \Box \forall x P(x))$	(forma normal de Skolem fórm. neg.)
2.	$\mathcal{T}_1$	$\neg(\Box^y P(y) \Rightarrow \Box^{\bullet y} \forall x P(x))$	(de 1, pela regra C)
3.	$\mathcal{T}_1$	$\Box^y P(y)$	(de 2, pela regra A)
4.	$\mathcal{T}_1$	$\neg \Box^{\bullet y} \forall x P(x)$	(de 2, pela regra A)
5.	$\mathcal{T}_2$	$\neg P(f(\bullet y))$	(de 4, pela regra F e skolemização)
6.	$\mathcal{T}_2$	$P(y)$	(de 3, pela regra E)

Assim, o tableau é fechado unificando-se as fórmulas 5 e 6. Note que não podemos renomear a variável $\bullet y$ da fórmula 5, mas podemos renomear a variável y da fórmula 6 a fim de fazermos a unificação.

Exemplo 3.2 Vamos tentar provar a seguinte fórmula:

$$\Box \exists x P(x) \Rightarrow \exists z \Box P(z)$$

1.	$\mathcal{T}_1$	$\forall z \neg(\Box \exists x P(x) \Rightarrow \Box P(z))$	(forma normal de Skolem da fórm. neg.)
2.	$\mathcal{T}_1$	$\neg(\Box^y \exists P(x) \Rightarrow \Box^{\bullet y} P(\bullet y))$	(de 1, pela regra C)
3.	$\mathcal{T}_1$	$\Box^y \exists x P(x)$	(de 2, pela regra A)
4.	$\mathcal{T}_1$	$\neg \Box^{\bullet y} P(\bullet y)$	(de 2, pela regra A)
5.	$\mathcal{T}_2$	$\neg P(\bullet y)$	(de 4, pela regra F)
6.	$\mathcal{T}_2$	$P(f(\bullet y))$	(de 3, pela regra E e skolemização)

Note que a variável $\bullet y$ da fórmula $\neg \Box^{\bullet y} P(\bullet y)$ que originou o tableau $\mathcal{T}_2$ foi considerada na skolemização de $\exists x P(x)$ como se $\bullet y$ fosse sua variável quantificada mais externa, dando origem à fórmula $P(f(\bullet y))$. Agora, não podemos fechar o tableau unificando as fórmulas 5 e 6, pois não podemos renomear a variável $\bullet y$.

4 Conclusão

O refinamento linear para o método de resolução para lógica modal proposicional de Fariñas del Cerro [6] foi proposto em [7]. O refinamento linear com cláusulas ordenadas (OL-deduções) dos métodos de resolução[4] e tableau para lógica modal de 1ª com a fórmula de Barcan foi apresentado em [3]. Por ser bastante intuitivo e permitir uma boa visualisação das provas, o uso do sistema de tableau facilitou sobremaneira na descoberta desta estratégia. Foram também estabelecidas fortes ligações do método sendo apresentado com o princípio de resolução, através um algoritmo de transformação de provas pelo método dos tableaux para resolução e vice-versa que será objeto de um próximo artigo em elaboração.

[4] Método de resolução similar ao de [9]

Referências

[1] E. W. Beth. *The foundations of Mathematics.* North Holland, 1959.

[2] M. M. do C. Costa. *Characterization of Modal [Action] Logic.* PhD thesis, Imperial College, Londres, 1990.

[3] M. M. do C. Costa. Estratégia linear para provadores automáticos de teoremas para lógicas modais. In *VIII Simpósio Brasileiro de Inteligência Artificial*, Brasilia - DF, Brasil, 1991. Sociedade Brasileira de Computação.

[4] M. M. do C. Costa. *Introdução à Lógica Modal Aplicada à Computação.* VIII Escola de Computação. Sociedade Brasileira de Computação, 1992.

[5] J. Cunningham and M. M. do C. Costa. Mechanised deduction and modal action logic. Technical Report R5, UK Alvey Software Engineering Directorate Forest (GEC-Marconi Research Limited), Imperial College, Londres, 1988.

[6] L Fariñas del Cerro. Resolution modal logics. *Logique et Analyse*, 1986.

[7] L. Fariñas del Cerro. Linear modal deductions. In *CADE 9*, 1988.

[8] J. Hintikka. Form and content in quantitification theory. *Acta Philosophica Fennica*, 8, 1955.

[9] K. Konolige. Resolution and quantified epistemic logics. In *Proc. of CADE-8*, 1986.

[10] S. Kripke. A completeness theorem in modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 24(1), march 1959.

[11] S. V. Reeves. *Theorem-proving by Semantic Tableaux.* PhD thesis, University of Birmingham, 1985.

[12] J. A. Robinson. A machine-oriented based on the resolution principle. *JACM*, 1965.

[13] R. M. Smullyan. *First-Order Logic.* Springer-Verlag, Berlim, 1968.

[14] L. A. Wallen. *Automated Proof Search in Non-Classical Logics: Efficient Matrix Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics.* PhD thesis, University of Edinburgh, 1987.